第27卷 第4期　　工 程 数 学 学 报　　Vol. 27 No. 4
2010年08月　　CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS　　Aug. 2010

文章编号:1005-3085(2010)04-0679-05

一类四阶常微分方程两点边值问题正解的存在性

陈天兰

(西北师范大学数学与信息科学学院，兰州 730070)

摘　要: 本文利用不动点指数理论研究具有超线性或次线性的非线性的四阶两点边值问题的正解存在性问题。文中给出了保证正解存在的参数取值范围及对应不存在正解的参数取值范围。本文主要结果推广并改进了一些已知结果。

关键词: 四阶边值问题；不动点指数；正解

分类号: AMS(2000) 34B15　　**中图分类号**: O175.8　　**文献标识码**: A

1　引言及主要结果

梁是工程建筑的基本构件之一，而两端简单支撑的弯曲弹性梁的平衡状态可用四阶两点边值问题来描述，由于其在工程上的重要性，近年来有较多文献研究了其正解的存在性[1-4]。特别地，Ma 和 Wang[1] 利用锥拉伸与锥压缩不动点定理获得了四阶边值问题

$$u^{(4)}(t)=f(t,\ u(t)),\quad t\in(0,1),\tag{1}$$

$$u(0)=u(1)=u''(0)=u''(1)=0,\tag{2}$$

当 $f(t,\ u)$ 关于 u 是超线性或次线性时一个正解的存在性结果。

受文献 [1] 的启发，本文试图利用不动点指数理论考虑四阶边值问题

$$u^{(4)}(t)-\lambda u(t)=f(t,\ u(t)),\quad t\in(0,1),\tag{3}$$

$$u(0)=u(1)=u''(0)=u''(1)=0,\tag{4}$$

当参数 λ 在 $[0,+\infty)$ 变化时正解的存在性。记

$$f_0=\liminf_{u\to0^+}\min_{t\in[0,1]}\frac{f(t,\ u)}{u},\quad f^0=\limsup_{u\to0^+}\max_{t\in[0,1]}\frac{f(t,\ u)}{u},$$

$$f_\infty=\liminf_{u\to+\infty}\min_{t\in[0,1]}\frac{f(t,\ u)}{u},\quad f^\infty=\limsup_{u\to+\infty}\max_{t\in[0,1]}\frac{f(t,\ u)}{u}.$$

本文总假定：

(H1)　$f:[0,1]\times[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 连续。

本文主要结果如下：

定理 1.1　若 (H1) 成立，并假设以下条件之一满足：

1)　$f^0=0,\ f_\infty=+\infty$；　2)　$f_0=+\infty,\ f^\infty=0$；

则当 $0\le\lambda<\pi^4$ 时，问题 (3), (4) 至少存在一个正解；当 $\lambda\ge\pi^4$ 时，问题 (3), (4) 无正解。

收稿日期: 2009-06-29.　**作者简介**: 陈天兰 (1986年5月生)，女，硕士. 研究方向：常微分方程边值问题.

注1 当$\lambda = 0$时，问题(3),(4)就退化为问题(1),(2)，且定理1.1对应的结果就是文献[1]的主要结果。显然，本文结果推广了文献[1]的结果。

注2 当λ在$[0,+\infty)$变化时，本文对存在正解及无正解的情形都给予了考虑。其中π^4为方程$u^{(4)}(t)-\lambda u(t)=0,\ t\in(0,1)$在(4)式下的第一个特征值，其特征函数是$\sin\pi t$。

2 预备知识

本文的工作空间是Banach空间$C[0,1]$，其范数为$\|u\|=\max\limits_{t\in[0,1]}|u(t)|$。记

$$C^{+}[0,1]=\left\{u\in C[0,1]: u(t)\geq 0,\ 0\leq t\leq 1\right\}.$$

设$G(t,s)$为边值问题$-u''(t)=0,\ t\in(0,1),\ u(0)=u(1)=0$的Green函数。则

$$G(t,s)=\begin{cases} s(1-t), & 0\leq s\leq t\leq 1,\\ t(1-s), & 0\leq t\leq s\leq 1.\end{cases}$$

记

$$M=\max_{t\in[0,1]}G(t,t),\quad m=\min_{t\in[\frac14,\frac34]}G(t,t),\quad C_0=\int_0^1 G(t,t)G(t,t)\mathrm{d}t,\quad \sigma=\frac{mC_0}{M}.$$

引理2.1 设$h\in C^{+}[0,1]$，则线性边值问题

$$u^{(4)}(t)=h(t),\quad t\in(0,1),\quad u(0)=u(1)=u''(0)=u''(1)=0,$$

存在正解$u(t)$，且

$$u(t)\geq\frac{C_0G(t,t)}{M}\|u\|,\quad t\in(0,\ 1).$$

证明 由$u^{(4)}(t)=-(-u''(t))''$，易知

$$u(t)=\int_0^1\int_0^1 G(t,\tau)G(\tau,s)h(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau,\quad t\in[0,1].$$

显然，由$G(t,t)$的性质可知$u(t)>0,\ t\in(0,1)$，且

$$u(t)\leq\int_0^1\int_0^1 G(\tau,\tau)G(s,s)h(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau\leq M\int_0^1 G(s,s)h(s)\mathrm{d}s,\quad t\in[0,1].$$

$$u(t)\geq C_0G(t,t)\int_0^1 G(s,s)h(s)\mathrm{d}s,\quad t\in[0,1].$$

故

$$u(t)\geq\frac{C_0G(t,t)}{M}\|u\|,\quad t\in[0,1].$$

定义算子$A: C^{+}[0,1]\to C^{+}[0,1]$，

$$Au(t)=\int_0^1\int_0^1 G(t,\tau)G(\tau,s)\big[f(s,u(s))+\lambda u(s)\big]\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau.$$

记

$$K=\left\{u\in C^{+}[0,1]: u(t)\geq\sigma\|u\|,\ \frac14\leq t\leq\frac34\right\},$$

显然 K 是 $C[0,1]$ 中的一个锥。

引理 2.2 若 (H1) 成立，则 $A: C^+[0,\ 1] \to C^+[0,1]$ 全连续，且 $A(K) \subset K$。

证明 由 $G(t,s)$ 的性质及引理 2.1 易证 $A(K) \subset K$。另外，由 f 的连续性及 Arzela-Ascoli 定理可证 A 是全连续的。

对 $r > 0$，记 $K_r = \{u \in K : \|u\| < r\}$, $\partial K_r = \{u \in K : \|u\| = r\}$。

引理 2.3[5] 设 $A: K \to K$ 是全连续的，并且对任意 $u \in \partial K_r$ 和 $0 < \mu \leq 1$，有 $\mu Au \neq u$，则 $i\,(A, K_r, K) = 1$。

引理 2.4[5] 设 $A: K \to K$ 是全连续的，并假设以下两个条件满足：

(i) $\inf\limits_{u\in\partial K_r} \|Au\| > 0$;

(ii) 对任意的 $u \in \partial K_r$ 和 $\mu \geq 1$，有 $\mu Au \neq u$，则 $i\,(A, K_r, K) = 0$。

3 主要结果的证明

情形 1 $f^0 = 0,\ f_\infty = +\infty$。

首先证明，当 $0 \leq \lambda < \pi^4$ 时，边值问题 (3), (4) 至少存在一个正解。

由 $f^0 = 0$ 知，存在 $\varepsilon \in (0, \pi^4 - \lambda)$ 及 $r_0 > 0$，使

$$f(t,u) \leq \varepsilon u, \quad t \in [0,1], \quad 0 \leq u \leq r_0. \tag{5}$$

设 $r \in (0, r_0]$，下证 $\mu Au \neq u$, $u \in \partial K_r$, $0 < \mu \leq 1$。反设存在 $u_0 \in \partial K_r$, $0 < \mu_0 \leq 1$，有 $\mu_0 Au_0 = u_0$，显然 u_0 满足微分方程

$$u_0^{(4)}(t) = \mu_0\big[f(t, u_0(t)) + \lambda u_0(t)\big], \quad t \in (0,1) \tag{6}$$

及边值条件 (4)，给 (6) 式两边同时乘以 $\sin \pi t$，再从 0 到 1 积分，由边值条件 (4) 及 (5)，有

$$\pi^4 \int_0^1 u_0(t) \sin \pi t \mathrm{d}t \leq (\varepsilon + \lambda) \int_0^1 u_0(t) \sin \pi t \mathrm{d}t. \tag{7}$$

由引理 2.1 可知

$$\int_0^1 u_0(t) \sin \pi t \mathrm{d}t > 0,$$

故 $\pi^4 \leq \varepsilon + \lambda < \pi^4$，矛盾。从而由引理 2.3 可得

$$i\,(A, K_r, K) = 1. \tag{8}$$

又由 $f_\infty = +\infty$ 可知，存在 $\varepsilon \in (\pi^4 - \lambda, +\infty)$ 及 $H > r_0$，使

$$f(t,u) \geq \varepsilon u, \quad t \in [0,1], \quad u \geq H. \tag{9}$$

设

$$C = \max_{t\in[0,1], u\in[0,H]} |f(t,u) - \varepsilon u| + 1,$$

则

$$f(t,u) \geq \varepsilon u - C, \quad t \in [0,1], \quad u \geq 0. \tag{10}$$

取

$$R > R_0 := \max\left\{\frac{H}{\sigma}, r_0\right\}.$$

对任意的$u\in\partial K_R$，结合(9)，有

$$Au\Big(\frac{1}{2}\Big)=\int_0^1\int_0^1 G\Big(\frac{1}{2},\tau\Big)G(\tau,s)\big[f(s,u(s))+\lambda u(s)\big]\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau$$
$$\geq\frac{1}{4}(\varepsilon+\lambda)C_0\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}G(s,s)u(s)\mathrm{d}s\geq\frac{m\sigma C_0(\varepsilon+\lambda)}{8}\|u\|,$$

而$\|Au\|\geq Au(\frac{1}{2})$，故$\inf\limits_{u\in\partial K_R}\|Au\|>0$。

下证，$\mu Au\neq u$，$u\in\partial K_R$，$\mu\geq 1$。反设存在$u_0\in\partial K_R$，$\mu_0\geq 1$，使$\mu_0Au_0=u_0$，显然u_0满足(4)及(6)，结合(10)，类似(7)的证明，有

$$\pi^4\int_0^1 u_0(t)\sin\pi t\mathrm{d}t\geq(\varepsilon+\lambda)\int_0^1 u_0(t)\sin\pi t\mathrm{d}t-\frac{2C}{\pi},$$

即

$$\int_0^1 u_0(t)\sin\pi t\mathrm{d}t\leq\frac{2C}{\pi(\lambda+\varepsilon-\pi^4)}.\tag{11}$$

再由引理2.1可得

$$\|u_0\|\leq\frac{2CM}{C_0\pi(\lambda+\varepsilon-\pi^4)}\Big(\int_0^1 G(t,t)\sin\pi t\mathrm{d}t\Big)^{-1}:=\overline{R}.\tag{12}$$

所以当$R>\max\{\overline{R},R_0\}$时，$\mu Au\neq u$，$u\in\partial K_R$，$\mu\geq 1$，故由引理2.4可得

$$i\,(A,K_R,K)=0.\tag{13}$$

因此，由(8),(13)可知，$i\,(A,K_R\setminus\overline{K}_r,K)=-1$。故问题(3),(4)在$K_R\setminus\overline{K}_r$上有正解。

下面证明，当$\lambda\geq\pi^4$时，边值问题(3),(4)无正解。

反设边值问题(3),(4)存在正解u，则u满足(3)。于是对(3)两边同时乘以$\sin\pi t$，再从0到1积分，有

$$(\pi^4-\lambda)\int_0^1 u(t)\sin\pi t\mathrm{d}t=\int_0^1 f\big(t,u(t)\big)\sin\pi t\mathrm{d}t.$$

当$\lambda=\pi^4$时

$$\int_0^1 f\big(t,u(t)\big)\sin\pi t\mathrm{d}t=0,$$

又因f满足(H1)且$f_\infty=+\infty$，则存在$t_0\in[0,1]$，使得$f(t_0,u(t_0))>0$，故

$$\int_0^1 f\big(t,u(t)\big)\sin\pi t\mathrm{d}t>0,$$

矛盾；当$\lambda>\pi^4$时

$$\int_0^1 f\big(t,u(t)\big)\sin\pi t\mathrm{d}t<0,$$

与(H1)矛盾。

因此，当$\lambda\geq\pi^4$时，边值问题(3),(4)无正解。

情形2 $f_0=+\infty$，$f^\infty=0$。

证明类似情形1。

参考文献：

[1] Ma R, Wang H. On the existence of positive solutions of fourth-order ordinary differential equations[J]. Appl Anal, 1995, 59: 225-231

[2] Gupta C. Existence and uniqueness theorems for the bending of an elastic beam equation[J]. Appl Anal, 1988, 26: 289-304

[3] Li Y. Positive solutions of fourth-order boundary-value problem with two parameters[J]. J Math Anal Appl, 2003, 281: 477-484

[4] 柴国庆，黄朝炎. 变系数四阶边值问题正解存在性[J]. 数学物理学报，2007, 27A(6): 1065-1073
Chai G Q, Huang C Y. Existence of positive solutions for the fourth-order boundary value problem with the coefficient[J]. J Acta Mathematics Scientia, 2007, 27A(6): 1065-1073

[5] Guo D, Lakshmikantham V. Nonlinear Problems in Abstract Cones[M]. New York: Academic press, 1988

Existence of Positive Solutions for a Class of Fourth-order Ordinary Differential Equations of Two-point Boundary Value Problem

CHEN Tian-lan

(College of Mathematics and Information Science, Northwest Normal University, Lanzhou 730070)

Abstract: Based on the fixed-point index theory, we investigate the existence of positive solutions to a class of boundary value problems of fourth-order ordinary differential equations with a nonlinearity which is superlinearity or sublineraity. We propose an interval of parameters to ensure the existence of positive solutions, and we find another interval of parameters corresponding to the nonexistence of positive solutions. Our main result improves and generalizes some known results.

Keywords: fourth-order boundary value problems; fixed point index; positive solution

Received: 29 June 2009. **Accepted:** 04 Mar 2010.